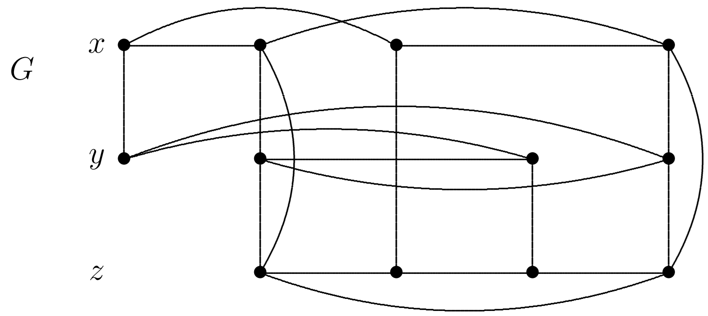
SAT $\triangleleft$ IND

(nesplnitelná formule)

Je dána logická formule $f(x,y,z) = (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$**.**
Rozhodněte, zda je f **splnitelná převodem na nezávislost grafu.**

Řešení.
Formuli f odpovídá následující graf:

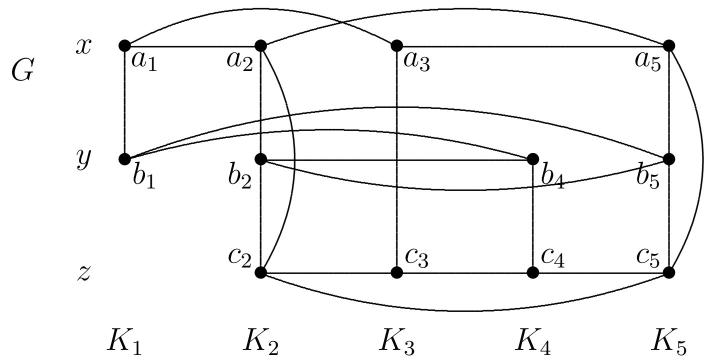


Formule f má 5 klauzulí, a tedy f je splnitelná právě když v grafu G existuje nezávislá množina velikosti 5.

Takovou nezávislou množinu se nedaří nalézt; to však není důkaz. K důkazu nesplnitelnosti formule f je třeba dokázat, že v G *neexistuje* nezávislá množina velikosti 5. Vzhledem k tomu, že není známa dobrá charakteristika, nezbývá než provést probírku všech možností.

To lze provést například následující úvahou.

Označíme K_i kliku v grafu G, odpovídající i-té klauzuli formule f, a uzly kliky K_i (odpovídající literálům proměnných x, y, z) označíme a_i, b_i, c_i, $i = 1,2,3,4,5$ (viz obrázek).



Kdyby v G existovala nezávislá množina A velkosti 5, musela by obsahovat z každé z klik $K_1, \ldots, K_5$ právě jeden uzel.

Z kliky K_1 tedy dostáváme 2 možnosti:

<u>1. případ: $a_1 \in A$.</u> Pak $a_2 \notin A$ a $a_3 \notin A$. Z K_3 dostáváme $c_3 \in A$, odkud $c_2 \notin A$ a $c_4 \notin A$. Protože $a_2 \notin A$ a $c_2 \notin A$, z K_2 musí být $b_2 \in A$. Pak ale nutně $b_4 \notin A$ a to je spor, protože nelze současně $b_4 \notin A$ i $c_4 \notin A$ (klika K_4 by neobsahovala žádný uzel množiny A).

<u>2. případ: $b_1 \in A$.</u> Pak $b_4 \notin A$ a $b_5 \notin A$; z K_4 plyne $c_4 \in A$, odkud $c_5 \notin A$ a $c_3 \notin A$. V K_5 máme $b_5 \notin A$ a $c_5 \notin A$, tedy $a_5 \in A$, odkud $a_3 \notin A$, a to je opět spor, neboť K_3 by neobsahovala žádný uzel množiny A.

Obě možnosti vedou ke sporu, množina A tedy neexistuje.